

Stephan HUßMANN, Florian SCHACHT, Dortmund

## Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen

Der vorliegende Beitrag stellt einen theoretischen Rahmen vor, vor dessen Hintergrund Prozesse der individuellen Begriffsbildung strukturiert und analysiert werden. Das Ziel einer solchen Untersuchung liegt einerseits in einem besseren Verständnis individueller Begriffsbildungsprozesse und damit verbunden in der Identifizierung überzeugender Festlegungen, die Schülerinnen und Schüler im Laufe von Begriffsbildungsprozessen eingehen, in der Identifizierung stabilisierender Fehlvorstellungen und dem Sichtbarmachen von Konzeptwechseln. Neben der Beschreibung der Lernendenperspektive dient diese Analyse andererseits der Untersuchung und Entwicklung des „begrifflichen Potentials“ von Lernumgebungen.

Der inhaltliche Fokus dieser Studie liegt auf der diskreten Mathematik, hier auf Eigenschaften von aufspannenden Bäumen in zusammenhängenden Graphen (vgl. HUßMANN et al. 2007). Ausgangspunkt sind *intentionale Probleme* (Hußmann 2003), die von Studierenden des Lehramtsstudiums in Gruppen selbst organisiert bearbeitet und deren Ergebnisse in Forschungsheften dokumentiert und reflektiert werden. Die Bearbeitung der Probleme macht die Entwicklung von entsprechenden mathematischen Verfahren und Begriffen notwendig, so dass die Forschungshefte einen Blick in die individuellen Begriffsbildungsprozesse gestatten.

Das folgende Beispiel zeigt einen Begriffsbildungsprozess, in dem das Problem einer optimalen Erneuerung eines Telefonnetzes mit der Entwicklung des Begriffes eines aufspannenden Baumes beantwortet werden kann. Es zeigt sich, dass die zur Verfügung gestellte Situation Behauptungen und Festlegungen initiiert, die den Begriffsbildungsprozess strukturieren, hinsichtlich sowohl von Gelingensbedingungen als auch von Sichtbeschränkungen. Der starke Zusammenhang von Situation und entwickelten Begriffsschema und die deutliche Gliederung der im Prozess formulierten Festlegungen legen die Verwendung der Theorie der Conceptual Fields nach VERGNAUD und der Theorie des Inferentialismus nach Brandom zur Rekonstruktion der Begriffsbildungsprozesse nahe.

VERGNAUD (1992, S. 306) formuliert eines der Hauptanliegen mathematikdidaktischer Forschung so: „The problem of making explicit the operational invariants involved in schemes is one of the main problems of mathematical education“. Der Begriff des Schemas, den Vergnaud nutzt, geht hierbei auf Piaget zurück, der sich seinerseits wieder auf Kant bezieht und damit eine “invariant organization of behavior for a certain class of

situations” (VERGNAUD 1992, S. 301) meint. Insofern sind die wesentlichen Merkmale solcher Schemata sog. *operationale Invarianten*, die einer Klasse von entsprechenden Situationen assoziiert sein sollen. Unseren Handlungen bzw. den operationalen Invarianten liegen gleichsam Behauptungen zugrunde, die wahr oder falsch sein können. Solche Behauptungen nennt Vergnaud *theorems-in-action*. Jede Behauptung wiederum lässt sich als Baustein eines Begriffs verstehen. Gleichzeitig sind Begriffe wesentliche Elemente von Behauptungen. „There is a dialectical connection between theorems and concepts“ (ebd.). *Concepts-in-action* nennt VERGNAUD Festlegungen, mit denen Kategorien geschaffen werden, „that enable the subject to (...) pick up the most adequate selection of information according to the situation and scheme involved” (1996, S. 225).

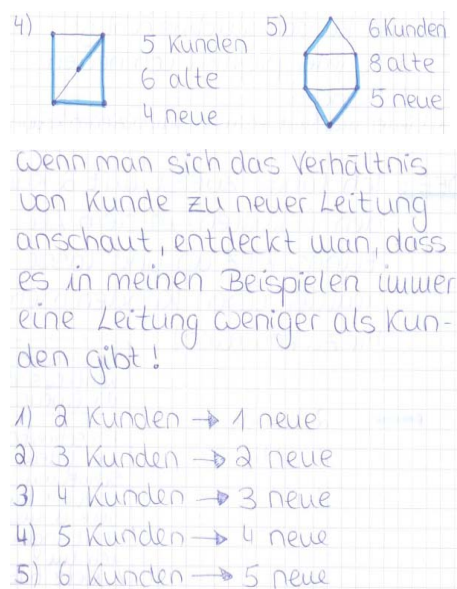


Abbildung 1: Kategorie des linearen Zusammenhangs als *concept-in-action*

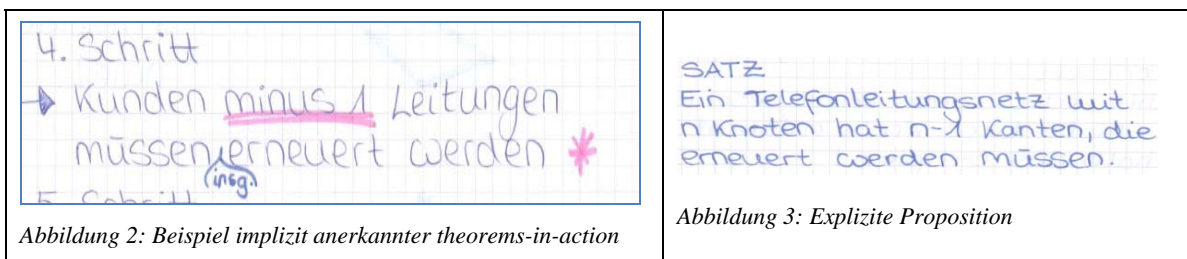
Abb. 1 zeigt, wie sich eine Studierende zu Beginn des Bearbeitungsprozesses des oben beschriebenen Problems auf die Kategorie des linearen Zusammenhangs als *concept-in-action* festlegt und dieses nutzt. Dieses *concept-in-action* ist hier wesentlicher Bestandteil der von ihr im Weiteren formulierten Behauptungen, welche sie z.T. explizit darlegt: „dass es in meinen Beispielen immer eine Leitung weniger als Kunden gibt“ (vgl. Abb. 1). Eine wichtige Rolle in diesem Zusammenhang spielt die Situation und die hierin genutzten Objekte, denn es zeigt sich, dass nicht nur die spezifische Situation die Auswahl der Kategorien bzw. der

*concepts-in-action* beeinflusst, es verdeutlicht darüber hinaus, inwiefern die Identifikation gewisser Objekte und Zusammenhänge mit ihren Eigenschaften und Beziehungen den individuellen Begriffsbildungsprozess erst ermöglichen (vgl. auch VERGNAUD 1999, S. 177). Insofern spielen für das Verständnis von Begriffsbildungsprozessen neben den individuellen *Schemata* insbesondere die *Referenz*, also die Situationen und Objekte, eine zentrale Rolle.

Die Theorie Vergnauds zeigt die strukturellen Zusammenhänge zwischen individueller Begriffsbildung und den umgebenden Referenzen. Sie zeigt aber nur unscharf das Beziehungsgeflecht zwischen den einzelnen Festlegungen und Behauptungen. Dieses sichtbar zu machen, bedarf es der

Explikation der feinen Nahtstellen, die das Zusammenhangsgefüge repräsentieren und sich in Gestalt von Gründen und Implikationen zeigen.

BRANDOM (1991, S. 71) schreibt dazu: „Einen (...) Begriff zu begreifen oder zu verstehen heißt, die Inferenzen, in die er verwickelt ist, praktisch zu beherrschen“, d.h. zu wissen, was aus den Festlegungen bzw. Behauptungen als die zentralen Bausteine von Begriffen folgt bzw. durch welche Festlegungen sie gleichsam impliziert werden und welche Festlegungen ausgeschlossen sind. Begriffsbildungsprozesse verstehen meint vor diesem Hintergrund also insbesondere das inferenzielle Beziehungsgeflecht, die zum großen Teil implizit eingegangenen Festlegungen, explizit zu machen. In diesem Sinne ermöglicht die Brandomsche Theorie nicht nur einen Perspektivwechsel, sondern die erkenntnistheoretischen Stoßrichtungen von Brandom und Vergnaud zeigen sich als überaus kohärent.



SATZ  
 Ein Telefonleitungsnetz mit  
 $n$  Knoten hat  $n-1$  Kanten, die  
 erneuert werden müssen.

Abbildung 3: Explizite Proposition

Der Ausschnitt aus einem von der Studierenden formulierten Algorithmus zur Aufdeckung von geeigneten Bäumen (vgl. Abb. 3) verdeutlicht den Aspekt der inferentiellen Gliederung: Die Idee des linearen Zusammenhangs als das hier zugrunde liegende *concept-in-action* wird als Abbruchkriterium für eine dem Algorithmus von Kruskal ähnliche Strategie genutzt. D.h. in einem Graphen mit  $n$  Knoten bricht der Algorithmus ab, sobald  $n-1$  Knoten erneuert wurden. Hier wird deutlich, dass die Studierende (hier: implizit) die Festlegung eingeht, dass der entdeckte Zusammenhang nicht nur für die gefundenen Beispiele (vgl. Abb. 1), sondern für beliebige (zusammenhängende) Graphen mit  $n$  Knoten gilt. Darüber hinaus dient diese Festlegung der Studierenden als Begründung für die Funktionsweise des Algorithmus: Der Algorithmus bricht ab, wenn  $n-1$  Kanten erneuert wurden, **weil** ein Baum in einem zusammenhängenden Graphen mit  $n$  Knoten  $n-1$  Kanten hat. Die Festlegung in diesem Sinne zu verwenden offenbart allerdings nur „eine Richtung“ inferentieller Relationen. Was an dieser Stelle gleichsam noch fehlt, sind die Berechtigungen **für** diese Festlegungen, also diejenigen Behauptungen, **aus denen** die verwendete Behauptung, das *theorem-in-action* (vgl. Abb. 4) folgt, mithin also ein Beweis für das *theorem-in-action*. Den erbringt die Studierende im nächsten Bearbeitungsschritt. Der Referenzkontext liefert insofern Anlässe, die z.T. impliziten *concepts-in-action* (hier die Kategorie des linearen Zusammenhangs) in eine propositionale Struktur zu bringen,

sie damit gleichsam als Element des inferentiellen Beziehungsgeflechtes explizit zu machen und somit das Begriffsgefüge zu (re-)strukturieren.

Ausblick: Die anschließende Perturbation (vgl. Abb. 5) stellt einen weiteren entscheidenden Schritt im Begriffsbildungsprozess dar: Hier werden die operationalen Invarianten und insofern auch die bisher eingegangenen Festlegungen und Behauptungen entlang der Referenzkontexte neu strukturiert. Die Studierende identifiziert eine Klasse von Situationen, für die das bisher genutzte *concept-in-action* nicht geeignet ist. Der Begriffsbildungsprozess vollzieht sich in diesem Beispiel entlang der Explikation implizit eingegangener Festlegungen.

wir fällt gerade auf, dass, sobald der Graph gewichtet ist, es nur diese eine Möglichkeit gibt die erneuerten Leitungen zu bilden. D.h. sobald ein Kriterium wie „möglichst kostengünstig“ etc. besteht, gibt es nur eine Möglichkeit die Leitungen zu erneuern.  
[wacht wie vorher 3 Knoten  
→ 3 Möglichkeiten  
s. Seite 4 hinten\*  
und 5 ]

Abbildung 4: Identifikation einer "neuen" Klasse von Situationen

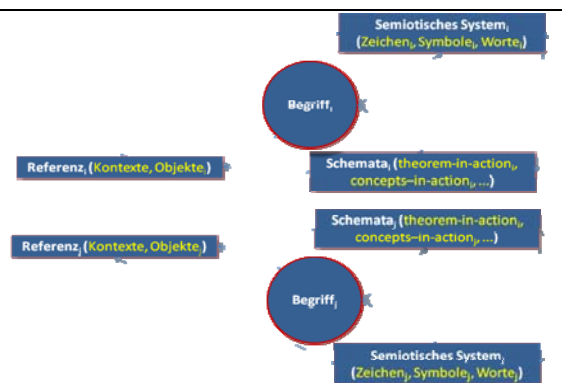


Abbildung 5: Darstellung des "Begriffsnetzes" am Ende des hier beschriebenen Begriffsbildungsprozesses

Hier deutet sich an, inwiefern individuelle Begriffsbildungsprozesse durch „making explicit the operational invariants involved in schemes“ (Vergnaud 1992, S. 306) und der Identifikation Verwebung verwandter operationaler Invarianten - sowohl in langfristiger als auch in kurzfristiger Perspektive - nachgezeichnet werden können.

## Literatur

- BRANDOM, Robert (2001): Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- HUBMANN, Stephan (2003): Mathematik entdecken und erforschen. Berlin: Cornelsen.
- HUBMANN, Stephan / LUTZ-WESTPHAL, Brigitte (Hrsg.) (1997): Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht. Wiesbaden: Vieweg.
- VERGNAUD, Gérard (1992): Conceptual Fields, Problem-Solving and Intelligent Computer-Tools. In De Corte, Erik / Linn, Marcia / Mandl, Heinz / Verschaffel, Lieven (Hrsg): Computer-based learning environments and problem-solving. Berlin, Springer. S. 287-208.
- VERGNAUD, Gérard (1996): Education, the best portion of Peaget's heritage. In: Swiss Journal of Psychology 55 (2/3). S. 112-118.
- VERGNAUD, Gérard (1999): A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. In: Journal of Mathematical Behavior, 17 (2). S. 167-181.